

## Pour en finir avec le paradoxe du menteur

Le paradoxe du menteur se présente sous la forme de l'assertion "*je mens*". Les logiciens se sont posés la question de savoir ce qu'il en était de la vérité de cette assertion elle-même : est-elle vraie ou fausse? Et ils font valoir qu'elle est indécidable c'est-à-dire qu'elle n'est ni l'un ni l'autre, ou ce qui revient au même, les deux à la fois puisque si l'on prend pour hypothèse qu'elle est vraie, on en arrive à la conclusion qu'elle est fausse et inversement. En effet, disent-ils, si la proposition "*je mens*" est vraie, alors celui qui parle ment en disant "*je mens*" et s'il ment, c'est donc que la proposition "*je mens*" est fausse. Inversement, si la proposition "*je mens*" est fausse, alors celui qui parle ne ment pas en disant "*je mens*" et s'il ne ment pas, c'est donc qu'il dit la vérité et s'il dit la vérité, c'est donc que la proposition "*je mens*" est vraie. Ce paradoxe est aussi connu sous le nom de paradoxe d'Épiménide, lequel étant lui-même Crétois, disait "*tous les Crétois sont menteurs*".

Mais où est la piperie? Où se trouve le tour de passe-passe, la faute de logique dans un tel développement? C'est que, tout simplement, l'assertion "*je mens*" n'est pas opérande possible de la propriété "*être vrai*" pas plus qu'elle ne le serait de la propriété contraire "*être faux*". Elle devient opérateur par rapport à la propriété de vérité, en l'occurrence opérateur de négation logique qui inverse la valeur de vérité d'une proposition. Et comme un opérateur n'a pas de valeur assignable puisqu'il exprime une fonction et n'est porteur en soi d'aucune valeur particulière ou, ce qui revient au même, les exprime toutes simultanément comme description en extension de ce que représente en compréhension l'opérateur lui-même, il n'y a pas à s'étonner que les logiciens n'aient pas trouvé de valeur de vérité à ce qui n'a pas de valeur de vérité. Précisons qu'ils ont montré cette contradiction en partant de l'hypothèse simplifiée "*s'il ment*", ce qui revient à dire "*s'il est vrai qu'il ment*" c'est-à-dire ainsi que nous venons de l'énoncer " si la proposition "*je mens*" est vraie ", formulation qui met en évidence qu'en réalité on applique l'opérande "*je mens*" à la propriété "*être vrai*".

Un opérateur n'est certes jamais opérateur en soi mais seulement opérateur par rapport à certaines propriétés et opérande par rapport à d'autres et c'est cette distinction qu'il faut apprécier. C'est ainsi que "*je mens*" est opérande possible d'une propriété comme par exemple "*être écrit sur cette page*" ou "*être le sujet de cet article*" mais devient opérande incompatible par rapport à la propriété "*être vrai*" car par rapport à cette propriété particulière, "*je mens*" est opérateur de négation logique, lequel, en tant qu'opérateur, n'a pas de valeur assignable.

Dans le même ordre d'idées, l'assertion "*je dis la vérité*" est tout aussi indécidable dans la possibilité légitime — puisque aucune de ces hypothèses n'a de sens — où nous sommes d'étudier aussi les conséquences de sa fausseté, ce que n'ont jamais vu les logiciens puisqu'ils n'ont été amenés à envisager la fausseté de l'hypothèse de l'assertion "*je mens*" que parce que sa vérité implique sa fausseté alors que la vérité de l'assertion "*je dis la vérité*" mène à sa vérité toute tautologique tout comme de sa fausseté suit une

fausseté non moins tautologique. Si donc la proposition "*je dis la vérité*" est vraie, alors celui qui parle dit la vérité en disant "*je dis la vérité*" et s'il dit la vérité, c'est donc que la proposition "*je dis la vérité*" est vraie. Mais si la proposition "*je dis la vérité*" est fausse, alors celui qui parle ment en disant "*je dis la vérité*" et s'il ment, c'est donc que la proposition "*je dis la vérité*" est fausse. Nous n'avons pas avancé pas d'un iota et nous ne savons toujours pas si l'assertion "*je dis la vérité*" est vraie ou fausse. Et pour cause, elle n'a pas de valeur assignable puisqu'elle représente par rapport à la propriété de vérité ou de fausseté l'opérateur d'identité logique qui affirme la valeur de vérité d'une assertion opérande de cet opérateur. Ainsi "*je dis la vérité*" équivaut à l'opérateur "*être vrai*" et être\_vrai(A) est vrai si A est vrai et faux si A est faux — c'est l'identité logique — alors que "*je mens*" correspond à l'opérateur "*être faux*" et être\_faux(A) est vrai si A est faux et faux si A est vrai — c'est la négation logique.

Les logiciens nous ont enseigné qu'un ensemble peut être décrit ou bien en extension — c'est-à-dire en énumérant entre accolades les uns après les autres les éléments de cet ensemble en utilisant le cas échéant les points de suspension pour indiquer un ensemble infini — ou bien en compréhension c'est-à-dire par une formule générique grâce à laquelle on peut former tous les éléments de l'ensemble considéré. Par exemple, l'ensemble des nombres pairs pourra s'écrire en extension par  $E=\{0, 2, 4, 6, 8, \dots\}$  et en compréhension par la formule "*multiplication d'un nombre entier par 2*" puisque l'ensemble des nombres pairs n'est autre que l'ensemble des nombres entiers qui ont été multipliés par 2. Il en résulte que ces deux notations, d'une part  $\{0, 2, 4, 6, 8, \dots\}$  et d'autre part "*multiplication d'un nombre entier par 2*" sont une seule et même chose mais exprimée de deux manières différentes, la première en extension et la deuxième en compréhension et nous pouvons résumer cette situation en écrivant l'égalité "*multiplication d'un nombre entier par 2*" =  $\{0, 2, 4, 6, 8, \dots\}$ . Notons au passage — remarque hors sujet mais qui nous fait pressentir la validité de cette identité — que cette interprétation qui fait que l'ensemble des nombres pairs s'assimile à la multiplication d'un nombre entier par 2 nous indique pourquoi il n'y a pas deux fois moins de nombres pairs que de nombres entiers tout court contrairement à ce que pourrait nous suggérer une autre intuition. C'est qu'on suppose logiquement avoir multiplié par 2 la totalité des nombres entiers et qu'à la finale il y aura bien évidemment autant de nombres multipliés par 2 qu'il y a de nombres. Maintenant l'ensemble des nombres pairs, qu'il soit exprimé en extension ou en compréhension, est opérande possible de certaines propriétés comme par exemple "*être infini*" mais s'élève à la dignité d'opérateur, en l'occurrence celui de multiplication d'un nombre entier par 2, par rapport à la propriété "*être pair*", ce pourquoi il ne fait aucun sens de se poser la question de savoir si l'ensemble des nombres pairs est lui-même pair ou non, car cet ensemble, par rapport à la propriété "*être pair*" n'est plus opérande mais opérateur, lequel par définition n'a pas de valeur assignable.

Ainsi "*je mens*" n'est autre que l'ensemble des valeurs de vérité que pourra prendre une quelconque assertion modifiée par cet opérateur de négation logique à savoir {vrai, faux} c'est-à-dire que l'on peut écrire "*je mens*"={vrai, faux} ou encore "*être faux*"={vrai, faux} pour utiliser notre propre notation où "*je mens*" est la définition en compréhension et {vrai, faux} la définition en extension. De même "*je dis la vérité*"={vrai, faux} ou encore "*être vrai*"={vrai, faux}. Et cette identité des ensembles {vrai, faux} obtenus par l'extension des deux formulations contraires "*être faux*" et "*être vrai*" devrait nous être le plus naturel dans la mesure où toute opération est corrélât de

son opposé. Créer l'ensemble des éléments ayant la propriété P ou créer l'ensemble des éléments n'ayant pas la propriété P sont une seule et même chose puisqu'en définitive, que nous nous placions du point de vue de P ou de non P, il y aura dans les deux cas, d'un côté, tout ce qui possède la propriété P et de l'autre, tout ce qui ne la possède pas, ce pourquoi les deux définitions en extension coïncident nécessairement. Cette définition en extension découle directement de l'axiome du tiers exclu à savoir de ce que toute proposition est soit vraie soit fausse. Une proposition ne peut donc avoir qu'une de ces deux valeurs de vérité {vrai, faux} mais une proposition inversée par l'opérateur "*je mens*" n'aura elle aussi qu'une de ces deux valeurs de vérité {vrai, faux} car une proposition vraie devient fausse en tant que modifiée par l'opérateur "*je mens*" et inversement une proposition fausse devient vraie en tant qu'inversée par ce même opérateur. À partir de là, on voit très bien que l'assertion "*je mens*" peut se maintenir sans contradiction opérante de certaines propriétés à condition toutefois qu'elles n'aient rien à voir avec la notion de vérité ou de fausseté mais que par rapport aux propriétés "*être vrai*" ou "*être faux*", elle n'est plus opérante mais opérateur. Qu'elle devienne opérateur par rapport à la propriété "*être vrai*" ne pose pas de difficulté particulière si ce n'est qu'il devient par là même impossible d'interroger la valeur de vérité de cette propriété pour cet opérante car cela reviendrait à donner en argument à une propriété un opérante qui n'est plus opérante par rapport à elle mais opérateur.

C'est ainsi que l'opérateur arithmétique "*moins*" est une fonction qui inverse le signe d'une valeur numérique, laquelle devient négative si elle est positive et positive si elle est négative. On peut donc écrire "*moins*"={positif, négatif}. L'opérante "*moins*" peut se maintenir opérante de certaines propriétés n'ayant rien à voir avec la notion de signe arithmétique comme par exemple "*être monosyllabique*" mais n'est pas opérante compatible avec la propriété "*être positif*" ni "*être négatif*" car par rapport à ces propriétés, "*moins*" devient opérateur d'inversion de signe arithmétique et n'a donc, en tant que tel, aucune valeur assignable. C'est pourquoi la question de savoir si le "*moins*" lui-même est positif ou négatif n'est pas à proprement parler indécidable car en réalité la question n'a aucun sens puisqu'on cherche à toutes forces une valeur à ce qui n'en a pas. Et les logiciens de ne pas la trouver, pas plus qu'ils ne trouveraient la valeur de l'opérateur arithmétique "*plus*" qui n'est autre que l'opérateur d'identité arithmétique, +a étant positif si a est positif et négatif si a est négatif, ce que le Poète, ce nous semble, a mieux compris que nos logiciens en disant que le pinson n'est ni gai ni triste et qu'il est simplement gai quand il est gai et triste quand il est triste.

On voit donc très bien là où le bât blesse. Les logiciens n'ont pas fait la distinction entre opérateur et opérante. N'ayant pas fait cette distinction, ils ont appliqué à des propriétés des opérantes incompatibles en ce qu'elles s'élevaient par rapport à ces propriétés à la dignité d'opérateurs. À partir de là, ils ont cherché la valeur de ces opérateurs et n'en ont pas trouvé car un opérateur exprime une fonction et n'est porteur en soi d'aucune valeur, tout comme x est une valeur et f(x) une valeur modifiée par la fonction f mais f une fonction qui n'a pas de valeur assignable.

Ensuite, ne trouvant pas de valeur à ce qui n'en a pas et ne peut pas en avoir, il se sont dits que c'était là un problème d'autoréférence ou de référence à soi réflexive que certains ont même appelé bouclage étrange. Mais ils se sont égarés une nouvelle fois car il n'y a pas d'autoréférence. L'opérateur "*je mens*" n'est absolument pas autoréférencé à lui-même. Simplement, ne trouvant pas de valeur de vérité à l'assertion "*je mens*" — et

pour cause, elle n'en a pas — les logiciens ont appliqué le "*je mens*" à lui-même et n'ont pas été plus avancés pour autant car si la fonction  $f$  n'a pas de valeur, l'application de  $f$  sur elle-même c'est-à-dire  $f(f)$  n'en aura pas non plus. En d'autres termes, ils autoréférencent le "*je mens*" à lui-même et vont dire ensuite que le "*je mens*" est autoréférencé et que c'est cette autoréférence qui pose problème alors que c'est eux-mêmes qui, ne trouvant rien de mieux, se mettent de leur propre mouvement à autoréférencer quelque chose qui n'est pas autoréférencé de par sa nature, pas plus que la négation logique n'est autoréférencée à elle-même. Il ne s'agit donc pas d'un problème d'autoréférence mais d'un problème de nature d'opérande appliquée à une propriété. Un élément peut être opérande compatible avec une propriété comme par exemple "*je mens*" est compatible avec la propriété "*être écrit en français*" mais incompatible à l'égard d'une autre, et ce, soit en vertu du sens — par exemple l'ensemble des nombres premiers n'est pas opérande possible de la propriété "*être rouge*" car il n'y a aucun sens à se poser cette question — soit en vertu de sa nature (ce qui affecte toujours aussi le sens) dans le cas particulier où l'opérande devient opérateur ou fonction par rapport à cette propriété, comme par exemple l'opérande "*je mens*" qui devient opérateur de négation logique par rapport à la propriété "*être vrai*" ou l'opérande "*ensemble des nombres pairs*" qui devient opérateur de multiplication d'un nombre entier par 2 par rapport à la propriété "*être pair*" ou l'opérande "*moins*" qui devient opérateur d'inversion de signe arithmétique par rapport à la propriété "*être positif*".

Les logiciens ont considéré l'ensemble des petites cuillères et ont remarqué que cet ensemble n'était pas lui-même une petite cuillère. Notons qu'à leur habitude, ils ne sont pas passés *per gradus debitos* — c'est-à-dire si l'on peut traduire ainsi, par les paliers nécessaires (littéralement, par les degrés dus) — puisqu'ils n'ont pas vérifié que l'ensemble des petites cuillères était opérande compatible à la propriété "*être une petite cuillère*". L'ensemble des petites cuillères, ont-ils poursuivi, n'étant pas lui-même une petite cuillère n'est pas élément de lui-même. Nous en sommes d'accord. Ils ont ensuite généralisé ce type d'ensemble en créant l'ensemble  $E$  dont tous les éléments ont une certaine propriété  $P$ , l'ensemble  $E$  (opérande possible de la propriété  $P$ , ajoutons-nous) n'ayant pas lui-même cette propriété  $P$  ou, ce qui revient au même, ayant la propriété non  $P$ . L'ensemble  $E$  n'ayant pas la propriété  $P$  de ses éléments n'est donc pas élément de lui-même. Nous en sommes d'accord. Ils ont ensuite généralisé cette généralisation en créant l'ensemble de tous les ensembles qui ne sont pas éléments d'eux-mêmes. Et nous en sommes toujours d'accord. Mais qu'est-ce que ce surensemble si ce n'est l'ensemble des ensembles qui ont pour propriété la propriété de ne pas avoir une certaine propriété? Si donc les éléments d'un des ensembles  $E$  de ce surensemble ont une certaine propriété  $P$ , l'ensemble  $E$  lui-même aura la propriété non  $P$  et inversement, si les éléments d'un de ses ensembles  $E$  a une certaine propriété non  $P$ , l'ensemble  $E$ , lui, aura la propriété  $P$ . Il est donc facile de voir que ce surensemble ne se distingue pas de l'opérateur d'inversion de possession de propriété — au même titre que "*je mens*" n'est autre que l'opérateur d'inversion logique d'une valeur de vérité — et que son expression en extension serait {avoir telle propriété, ne pas avoir telle propriété} puisque ce sont là les propriétés que sont susceptibles d'avoir les éléments de ce surensemble ainsi d'ailleurs que les éléments du surensemble corrélatif c'est-à-dire l'ensemble de tous les ensembles qui sont éléments d'eux-mêmes.

C'est pourquoi la question de savoir si l'ensemble de tous les ensembles qui ne sont pas éléments d'eux-mêmes est ou non élément de lui-même est illégitime et n'a pas lieu

d'être car "*être élément de lui-même*" signifie "*avoir la propriété de ses éléments*". Or, comme la propriété de tous ses éléments est précisément de ne pas avoir une certaine propriété, ce surensemble n'est autre que l'opérateur d'inversion de possession de propriété par rapport à la propriété "*avoir telle propriété*". Sa structure ne diffère pas en nature de la négation logique qui rend vrai ce qui est faux et faux ce qui est vrai. En se demandant si l'ensemble de tous les ensembles qui ne sont pas éléments d'eux-mêmes est élément de lui-même ou non, nous tournons en rond de la même façon qu'avec le paradoxe du menteur et concluons qu'il n'est pas élément de lui-même si l'hypothèse est qu'il est élément de lui-même et inversement.

Ce paradoxe disparaît si l'on comprend que ce surensemble n'est pas opérande possible de la propriété "*être élément de lui-même*" c'est-à-dire "*avoir telle propriété*" car par rapport à cette propriété, l'ensemble de tous les ensembles qui ne sont pas éléments d'eux-mêmes devient opérateur et n'a donc pas de valeur assignable. De même que l'opérande "*je mens*" ou l'ensemble {vrai, faux} devient opérateur par rapport à la propriété "*être vrai*", de même l'opérande "*ensemble de tous les ensembles qui ne sont pas éléments d'eux-mêmes*" ou l'ensemble {avoir telle propriété, ne pas avoir telle propriété} devient opérateur par rapport à la propriété "*avoir telle propriété*" ou son contraire "*ne pas avoir telle propriété*" et n'a pas en tant qu'opérateur de valeur assignable.

La question de savoir si l'ensemble de tous les ensembles qui sont éléments d'eux-mêmes est ou non élément de lui-même n'aurait pas plus de sens puisque ce surensemble n'est autre que l'opérateur d'affirmation de possession de propriété par rapport à la propriété d'avoir ou non telle propriété puisque si les éléments d'un de ses ensembles E a une certaine propriété P, l'ensemble E aura lui aussi cette propriété P et si les éléments d'un de ses ensembles E n'a pas une certaine propriété P, l'ensemble E n'aura pas lui non plus cette propriété P, ce pourquoi son expression en extension est la même que celle de son surensemble corrélatif à savoir l'ensemble {avoir telle propriété, ne pas avoir telle propriété}. Cet opérateur identitaire ne fait que maintenir une certaine possession de propriété en son état et est isomorphe à l'opérateur logique "*être vrai*" qui affirme la valeur de vérité de son opérande qu'elle soit vraie ou fausse ou encore à l'opérateur arithmétique "*plus*" qui maintient le signe de son opérande qu'il soit positif ou négatif.

On voit donc que tous ces pseudo-paradoxes et autres indécidabilités s'évanouissent si l'on cesse d'injecter à une propriété un opérande devenu opérateur par rapport à elle, *quod mediocriter attendenti perspicuum fore credo* pour le dire *more spinoziano*, ce qui, je crois, sera clair à toute personne qui y prêtera quelque peu attention.

Gilles Louise

Août 1997